3.1 导数的概念

在生产实际和科学实验中，常常需要从数量上研究函数相对于自变量的变化快慢程度，如变速直线运动物体的速度问题、曲线的切线斜率问题等. 而有关速度和切线的斜率等这一类问题，都可归结为函数的变化率问题，在数学上称为导数.

3.1.1 变化率问题

1. 变速直线运动的瞬时速度

设做变速直线运动的质点在 t 时刻所经过的路程为 s，即路程 s 是时间 t 的函数

$$s = f(t)$$

则当时间由 t_0 改变到 t 时，动点在 $\Delta t = t - t_0$ 这段时间内经过的路程为 $\Delta s = f(t) - f(t_0)$. 动点在 $\Delta t = t - t_0$ 这段时间内的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

如果当时间间隔 Δt 很小时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 可以近似地等于动点在 t_0 时刻的速度，且 Δt 越小，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就越接近于动点在 t_0 时刻的速度. 但对于动点在 t_0 时刻的速度的精确概念来说，需要用到极限的思想.

于是，当 $t \to t_0$ 时，若极限 $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ 存在，则此极限就是动点在 t_0 时刻的瞬时速度，记作 $v(t_0)$，即

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

例 3-1 求自由落体在 t_0 时刻的瞬时速度.

解 自由落体运动中路程与时间的关系为

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

于是在$[t_0, t]$内，落体经过的路程为

$$\Delta s = s(t) - s(t_0) = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2$$

所以落体在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{2}g(t + t_0) = gt_0$$

2. 平面曲线的切线斜率

设有平面曲线 C（见图 3-1），点 $M(x_0, y_0)$ 为曲线 $y = f(x)$ 上的一定点，点 $N(x, y)$ 为曲线 $y = f(x)$ 上的一动点，设割线 MN 的倾斜角（与 x 轴的夹角）为 φ，则割线 MN 的斜

率为

$$\tan \varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

当 $x \to x_0$ 时，动点 N 就沿曲线 $y = f(x)$ 趋于定点 M，割线 MN 就随之绕定点 M 旋转而趋于极限位置 MT，这时称割线 MN 的极限位置 MT 为曲线在定点 M 处的切线.

于是，当 $x \to x_0$ 时，若极限

$$\lim_{x \to x_0} \tan \varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则此极限就是切线的斜率，记作 k，即

$$k = \tan \alpha = \lim_{x \to x_0} \tan \varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

其中 α 是切线 MT 的倾斜角.

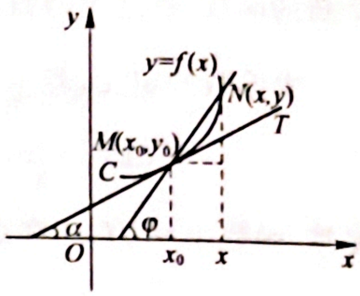

图 3-1

3.1.2 导数的概念

上述两个问题，一个是物理问题，一个是几何问题，它们的实际意义完全不同，但从数量关系来分析是相同的，都是研究函数增量与自变量增量比值的极限问题. 自然科学和工程技术领域中许多有关变化率的问题，如非恒稳的电流强度、化学反应速度等都可归结为这类极限，因此把它们抽象成导数的概念.

1. 导数的定义

定义 3.1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，相应地，函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称此极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记为

$$f'(x_0), y'\Big|_{x=x_0}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

微课 导数的定义

即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3-1}$$

如果上述极限不存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

根据导数的定义，变速直线运动的质点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 为路程函数 $s = s(t)$ 在点 t_0 处的导数，即 $v(t_0) = s'(t_0)$；曲线 C 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率就是曲线方程 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即 $k_{切} = \tan \alpha = f'(x_0)$.

为了方便起见，导数的定义式还可以写成以下两种形式.

令 $\Delta x = h$，则式(3-1)变成

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

若令 $x_0 + \Delta x = x$，当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $x \to x_0$，则式(3-1)变成

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

定义 3.2 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，并且在区间的左、右端点处 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导. 若函数 $y=f(x)$ 在某区间内可导，则对于该区间内的每一个 x，都有唯一确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，这样就确定了一个新的函数，称之为函数 $y=f(x)$ 的**导函数**，简称**导数**，记作 $f'(x)$，y'，$\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

由导数的定义，若 $y=f(x)$ 在某区间 I 上可导，则 $y=f(x)$ 在 I 上的导函数为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ 或 } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

例 3-2 求常量函数 $y=C$（C 为常数）的导数.

解 由题意知，任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，因为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0, \frac{\Delta y}{\Delta x}=0, \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

所以 $C'=0$.

例 3-3 求函数 $y=x^2$ 的导数.

解 $$(x^2)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

即 $(x^2)'=2x$. 一般地，有 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

2. 单侧导数

利用单侧极限给出函数在一点处的单侧导数的定义.

定义 3.3 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

与

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称它们分别为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**和**右导数**，分别记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数都存在且相等，即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

3.1.3 导数的几何意义

由前面的讨论可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M[x_0,f(x_0)]$ 处的切线的斜率，即

$$f'(x_0)=\tan\alpha$$

其中 α 是切线的倾斜角.

根据导数的几何意义,可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),f'(x_0)\neq 0$$

例 3-4 求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为 $(\cos x)'=-\sin x$,所以

$$(\cos x)'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故所求切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

思考 导数的几何意义是什么?如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,那么曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处一定有切线吗?反之呢?

3.1.4 函数可导性与连续性的关系

定理 3.1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导,则函数在该点处必连续.

由定理 3.1 知函数可导必连续,但是连续不一定可导.

例 3-5 讨论 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$,所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

即 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$. 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.