第三节 控制系统的稳定性分析

稳定是系统正常工作的首要条件。本节对线性定常系统的稳定性进行讨论。

▷▷ 一、系统稳定的充分与必要条件

一个处于某平衡状态的线性定常系统,若在扰动作用下偏离了原来的平衡状态,而当扰动消失后,系统仍能回到原来的平衡状态,则称该系统是稳定的,否则,系统为不稳定。稳定性是去除扰动作用后系统本身的一种恢复能力,所以是系统的一种固有特性,它只取决于系统的结构与参数,与外作用及初始条件无关。

设系统传递函数的一般表达式为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\quad(n\geqslant m)$$

又设

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

则有

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s-s_1}+\cdots+\frac{A_n}{s-s_n}$$

式中，s_i 为特征方程的根。

对上式求拉普拉斯逆变换，得系统的响应

$$c(t)=A_0+A_1e^{s_1t}+\cdots+A_ne^{s_nt}$$

其中，第一项为由输入引起的输出稳态分量，其余各项均为系统输出的瞬态分量。显然，处于平衡状态下的稳定系统，其输出瞬态分量应该均为零。由上式可知，要做到这一点，必须满足 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{s_it}\to 0$。所以，系统稳定的充分与必要条件是：系统所有特征根的实部小于零，即其特征方程的根都在 s 左半平面。

▷▷ 二、劳斯稳定判据

求得特征方程的根，再根据稳定的充分与必要条件，就可判定系统的稳定性。但对于高阶系统，求解方程的根比较困难，而方程的根是由方程的系数确定的，如果仅仅为了判断系统的稳定性，可根据特征方程的各项系数来确定方程的根是否具有正实部，这就是劳斯稳定判据的基本思想。劳斯稳定判据是根据闭环特征方程的各项系数，按一定的规则排列成所谓劳斯表，然后根据表中第一列系数正、负符号的变化情况来判别系统的稳定性。现叙述如下。

设系统的特征方程为

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

根据特征方程的各项系数排列成下列劳斯表：

$$\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots \\
s^{n-3} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & b_{n1} & & &
\end{array}$$

可见，表中前面两行由间隔取特征方程中系数形成，从第三行开始，各元素的计算按下述规律推算：

$$b_{31}=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$$

$$b_{32}=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$b_{41}=\frac{b_{31}a_3-a_1b_{32}}{b_{31}}$$

$$b_{42}=\frac{b_{31}a_5-a_1b_{33}}{b_{31}}$$

$$\vdots$$

以此类推,可求出各元素 $b_{31},\cdots,b_{n1}$。

劳斯稳定判据:

若特征方程式的各项系数都大于零(必要条件),且劳斯表中第一列元素均为正值,则所有的特征根均位于 s 左半平面,相应的系统是稳定的;否则,系统为不稳定,且第一列元素符号改变的次数等于该特征方程的正实部根的个数。

例 3-5 已知系统的特征方程 $s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$,试判断该系统的稳定性。

解 通过计算,列出劳斯表如下:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -6 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

$$b_{31}=\frac{2\times3-4}{2}=1$$

$$b_{32}=\frac{2\times5-0}{2}=5$$

$$b_{41}=\frac{1\times4-2\times5}{1}=-6$$

$$b_{51}=\frac{-6\times5-1\times0}{-6}=5$$

由劳斯表可见,第一列元素的符号改变了两次,表示有两个正实部根,相应的系统为不稳定。

例 3-6 系统结构图如图 3-17 所示。为使系统稳定,试确定放大倍数 K 的取值范围。

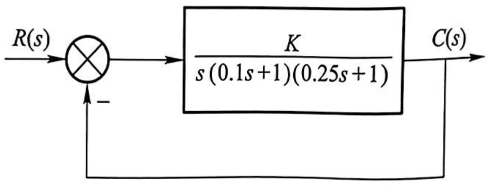

图 3-17 例 3-6 系统结构图

解 首先求出系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)+K}$$

系统的特征方程为

$$s^3+14s^2+40s+40K=0$$

列出劳斯表为

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 40 \\ s^2 & 14 & 40K \\ s^1 & (560-40K)/14 & \\ s^0 & 40K & \end{array}$$

系统稳定的条件为

$$\begin{cases}560-40K>0\\40K>0\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}K<14\\K>0\end{cases}$$

所以

$$0<K<14$$

即 K 必须小于 14 且大于 0,系统才稳定。

如果劳斯表中某行的第一个元素为零,而该行中其余各元素不等于零或没有其他元素,将使得劳斯表无法往下排列。此时,可用一个接近于零的很小的正数 ε 来代替零,完成劳斯表的

排列。

例 3-7 已知系统的特征方程 $s^3+2s^2+s+2=0$,试判断系统的稳定性。

解 列出劳斯表为

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 2 & 2 \\
s^1 & 0(\varepsilon) & \\
s^0 & 2 &
\end{array}
$$

第一列中元素符号相同,表明没有正实部的根。但有一个零元素,表示该方程中有一对纯虚根存在,相应的系统不稳定。

对于这个简单的方程,可通过因式分解来验证,即

$$(s+2)(s^2+1)=0$$

据此求得 $s_1=-2, s_{2,3}=\pm \mathrm{j}$。这与用劳斯判据所得的结论是一致的。

例 3-8 设系统的特征方程为 $s^3-3s+2=0$,试用劳斯判据确定该方程的根在 s 平面上的分布。

解 方程中 s^2 项的系数为 0,s 项的系数为负值,不符合系统稳定的必要条件,由此可知,该方程中至少有一个根在 s 右半平面,相应的系统为不稳定。为了确定方程式的根在 s 平面上的具体分布,现用劳斯判据进行判别。

列出劳斯表为

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & -3 \\
s^2 & 0(\varepsilon) & 2 \\
s^1 & (-3\varepsilon-2)/\varepsilon & \\
s^0 & 2 &
\end{array}
$$

可见,表中第一列元素的符号变化了两次。由劳斯判据可知,该方程有两个根在 s 右半平面。

上述结论也可用因式分解的方法来验证。把原方程改写为

$$s^3-3s+2=(s-1)^2(s+2)=0$$

即 $s_{1,2}=1, s_3=-2$,从而验证了劳斯判据所得结论的正确性。

如果劳斯表中某一行的元素全为零,表明相应方程中含有大小相等、符号相反的实根和(或)共轭根。可用全零行上面一行的元素为系数,构成一辅助多项式,该多项式对 s 求导后,所得多项式的系数即可用来取代全零行。同时,由辅助方程可以求得特征方程的根。

例 3-9 某控制系统的特征方程为 $s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$,试判断系统的稳定性。

解 列出劳斯表为

$$
\begin{array}{lllll}
s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\
s^5 & 2 & 12 & 16 & \\
s^4 & 2 & 12 & 16 & \\
s^3 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

由于 s^3 这一行的元素全为零,使得劳斯表无法往下排列,可由上一行的元素作为系数组成辅助

多项式

$$P(s)=2s^4+12s^2+16$$

$P(s)$对 s 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}P(s)}{\mathrm{d}s}=8s^3+24s$$

用系数 8 和 24 代替全零行中的零元素,并将劳斯表排完,得

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	2	12	16	
s^3	8	24		
s^2	6	16		
s^1	8/3			
s^0	16			

由上表知,第一列元素的符号没有变化,表明该特征方程在 s 右半平面上没有特征根。但 s^3 这一行的元素全为零,表明有大小相等、符号相反的共轭根。令 $P(s)=0$,便构成了辅助方程,解此方程可得两对根$\pm \mathrm{j}\sqrt{2}$和$\pm \mathrm{j}2$。显然,系统不稳定。

另外,劳斯表中某行的元素同乘以某正数,不影响对系统稳定性的判断。