3.3 刚体定轴转动的动能定理

3.3.1 转动动能

刚体绕定轴转动时的动能，称为**转动动能**.设刚体以角速度 ω 绕定轴转动，其中每一质元都在各自转动平面内以角速度 ω 作圆周运动.设第 i 个质元质量为 Δm_i，离轴的距离为 r_i，它的线速度为 $v_i=r_i\omega$，则 i 质元的动能为$\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}\Delta m_i(r_i\omega)^2$，整个刚体的转动动能为

$$E_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3.13)$$

这说明：**刚体绕定轴转动时的转动动能等于刚体的转动惯量与角速度平方乘积的一半.**与物体的平动动能（质点的动能）$\frac{1}{2}mv^2$ 相比较，二者形式上十分相似.其中转动惯量与质量相对应，角速度与线速度对应.由于转动惯量与轴的位置有关，因此，转动动能也与轴的位置有关.

3.3.2 力矩的功

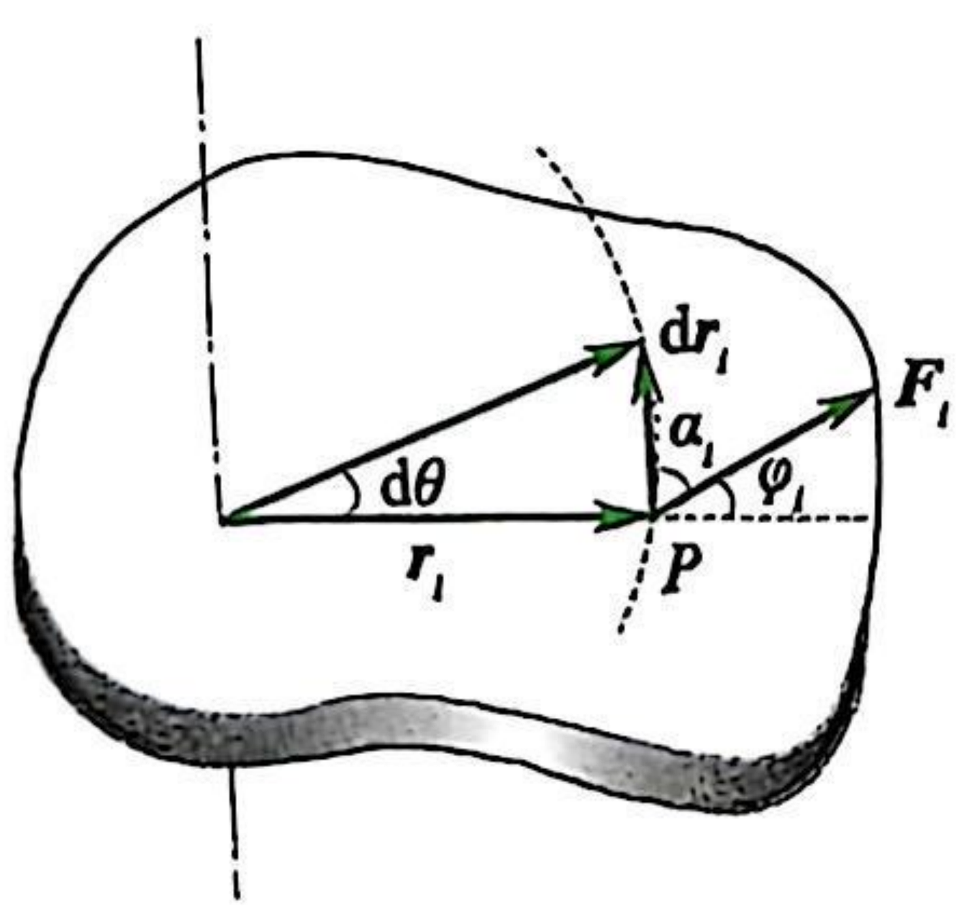

图 3.10 力矩的功

如图 3.10 所示，设在转动平面内的外力 $\boldsymbol{F}_i$ 作用于 P 点（注：此处之所以不考虑内力的功，是因为一对内力功之和仅与相对位移有关，而刚体各质元之间不存在相对位移，内力功之和始终为零），经 $\mathrm{d}t$ 时间后 P 点沿一圆周轨道移动 $\mathrm{d}s_i$ 弧长，半径 r_i 扫过 $\mathrm{d}\theta$ 角，并有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i|=\mathrm{d}s_i=r_i\mathrm{d}\theta$，由功的定义式(2.24)有

$$\mathrm{d}W_i=F_{\tau i}\mathrm{d}s_i=F_{\tau i}r_i\mathrm{d}\theta=M_i\mathrm{d}\theta$$

式中 $F_{\tau i}=F_i\cos\alpha_i$，$M_i=F_{\tau i}r_i$，然后对 i 求和，得

$$dW = (\sum M_i)d\theta = Md\theta \tag{3.14}$$

式中 M 为作用于刚体上外力矩大小之和. 式(3.14) 说明力矩所做元功等于力矩和角位移的乘积. 当刚体在力矩 $\boldsymbol{M}$ 作用下,由 θ_1 转到 θ_2 时,力矩的功为

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta \tag{3.15}$$

力矩的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega \tag{3.16}$$

当功率一定时,力矩与角速度成反比.

3.3.3 刚体定轴转动的动能定理

如果将转动定律写成如下形式

$$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

分离变量并积分,又考虑到 $\theta = \theta_1$ 时 $\omega = \omega_1$,所以

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega$$

于是可得

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 \tag{3.17}$$

此式表明,合外力矩对定轴转动刚体所做的功等于刚体转动动能的增量. 这就是刚体定轴转动时的动能定理.

刚体定轴转动的功能推导

例 3.5

如图 3.11 所示,一根质量为 m,长为 l 的均匀细棒 OA,可绕固定点 O 在竖直平面内转动. 今使棒从水平位置开始自由下摆,求棒摆到与水平位置成 30° 角时中心点 C 和端点 A 的速度.

解　棒受力如图 3.11 所示,其中重力 $\boldsymbol{G}$ 对 O 轴的力矩大小等于 $mg\dfrac{l}{2}\cos\theta$,是 θ 的函数,轴的支持力对 O 轴的力矩为零. 由转动动能定理,有

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad ①$$

等式左边的积分为重力矩的功,即

$$W_G = \int_0^{\frac{\pi}{6}} mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta = \frac{l}{4}mg$$
$$= -mg(h_{c末} - h_{c初})$$

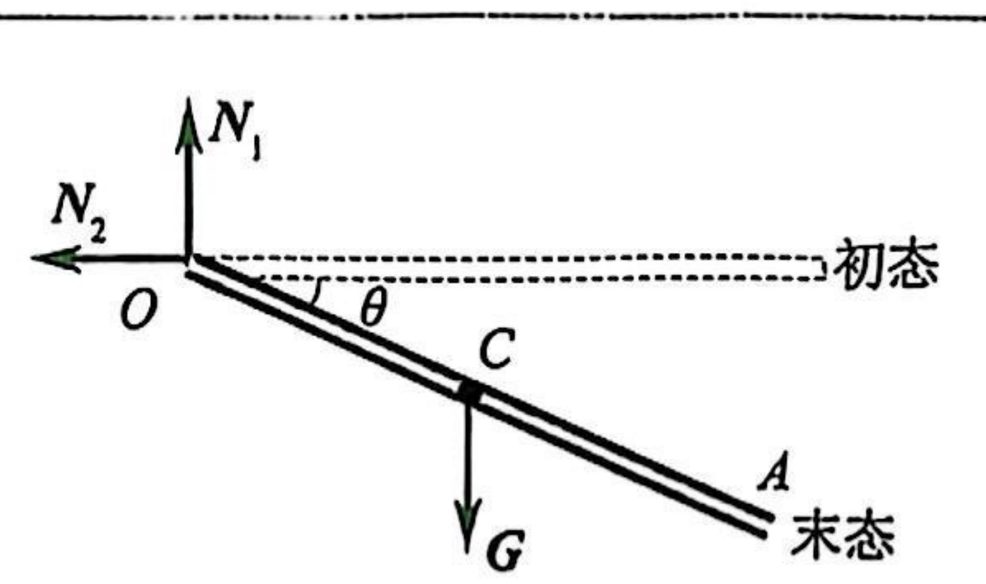

图 3.11

式中 h_c 是棒的质心所在处相对棒的质心 C 在最低点(棒在竖直位置处) 的高度. 这说明,重力矩所做的功,也等于棒的质心 C 的重力势能增量的负值. 可以证明:刚体的重力势能等于将刚体的全部质量都集中在质心处时所具有的重力势能,而与刚体的方位无关. 即刚体

的重力势能可表示为 mgh_c，h_c 表示质心相对重力势能零点的高度. 因此，对于刚体组，同样可引入机械能和机械能守恒定律，其守恒条件与质点系的条件相同.

将 $W_G = mg\dfrac{l}{4}$ 及 $J = \dfrac{1}{3}ml^2$ 代入①式，得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

则中心点 C 和端点 A 的速度分别为

$$v_C = \omega\frac{l}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6gl}$$

$$v_A = \omega l = \frac{1}{2}\sqrt{6gl}$$

例 3.6

如图 3.12 所示，两物体的质量为 m_1 和 m_2，且 $m_1 > m_2$. 圆盘状定滑轮的质量为 M_1 和 M_2，半径为 R_1 和 R_2，质量均匀分布. 绳轻且不可伸长，绳与滑轮间无相对滑动，滑轮轴光滑. 试求当 m_1 下降了 x 距离时两物体的速度和加速度.

解　以两物体、两滑轮、地球成为一系统，$W_{外} = 0$，$W_{内非} = 0$，故机械能守恒. 以 m_1 下降 x 时的位置为重力势能零点，则有

$$m_1gx + m_2gx = m_2g2x + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$$

由于 $v = \omega_1R_1 = \omega_2R_2$，$J_1 = \dfrac{1}{2}M_1R_1^2$，$J_2 = \dfrac{1}{2}M_2R_2^2$，可解得

$$v = 2\sqrt{\frac{(m_1 - m_2)gx}{2(m_1 + m_2) + M_1 + M_2}}$$

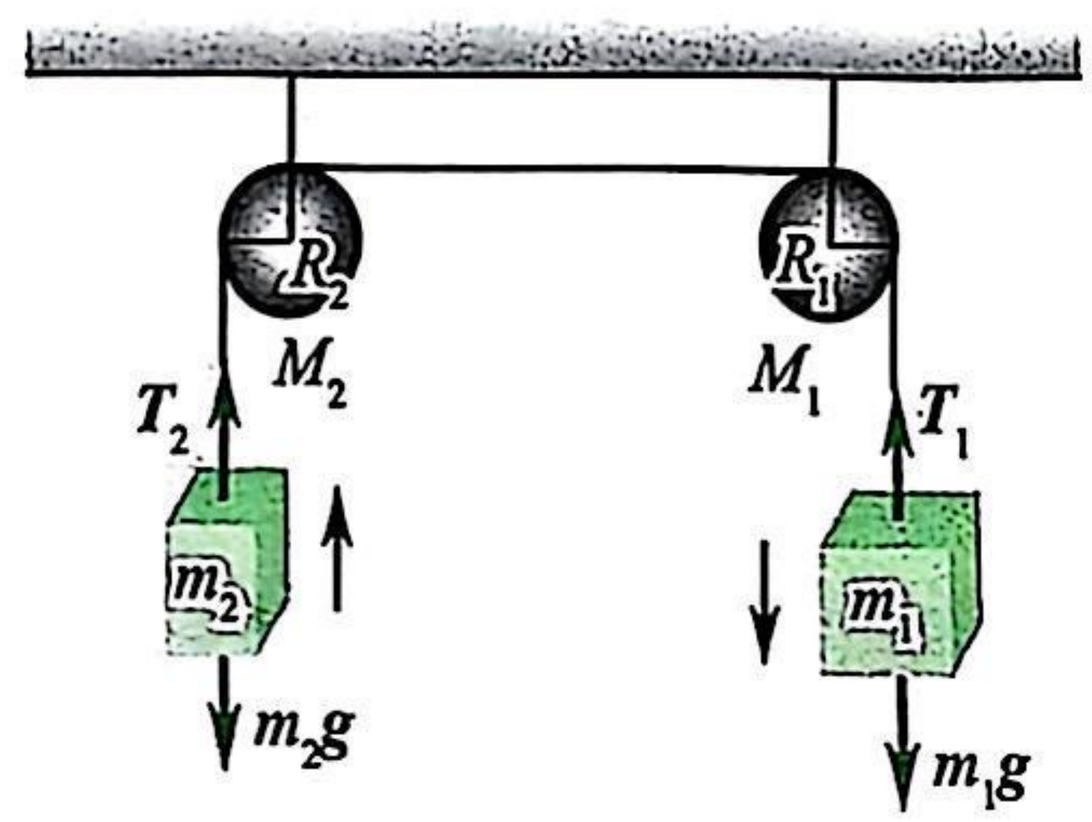

图 3.12

由于运动过程中物体所受合力为恒力，a 为常数，$v^2 = 2ax$，故有

$$a = \frac{2(m_1 - m_2)g}{2(m_1 + m_2) + M_1 + M_2}$$