2. 对飞机进行两次射击，每次发射一弹，设事件 $A=\{$第一次击中飞机$\}$，$B=\{$第二次击中飞机$\}$，$C=\{$恰有一弹击中飞机$\}$，$D=\{$至少有一弹击中飞机$\}$，$E=\{$两弹都击中飞机$\}$.

(1)试用事件 A,B 表示事件 C,D,E；(2)C 与 E 是互逆事件吗？为什么？

3. 在 1 500 件产品中有 400 件次品，1 100 件正品. 任取 200 件，求：(1)恰好有 90 件次品的概率；(2)至少有 2 件次品的概率.

4. 设 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，求下列三种情况下的 $P(B\overline{A})$值.

(1)$AB=\Phi$；(2)$A\subset B$；(3)$P(AB)=\frac{1}{8}$.

5. 设 A,B 是两个事件，$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{6}$. 求 $P(\overline{A}|\overline{B})$.

6. 射手对目标独立射击 5 发，单发命中的概率为 0.6. 求：(1)恰好命中 2 发的概率；(2)至多命中 3 发的概率；(3)至少命中 1 发的概率.

§8.2　随机变量及其分布

8.2.1　随机变量

在各种随机试验中，每一个随机事件都可以用一个变量取一个数值来表示. 例如掷骰子，掷出的点数是 1，2，…，6 中的一个，其中的任意一个随机事件都可以用变量 X 取 1，2，…，6 中的某个值来表示，这样 X 就成了取 1，2，…，6 中某个值的变量；又如在产品的抽查中，“抽到正品”事件可以用“$X=1$”来表示，“抽到次品”事件可以用“$X=0$”来表示，这样 X 就成了既可取 1 又可取 0 的变量.

像这种用来表示随机试验结果的变量称为**随机变量**. 随机变量通常用大写字母 X,Y,Z 或 ξ,η,ζ 等表示. 显然，随机变量具有如下特点.

(1)随着试验的重复，它可以取不同的值.

(2)每次试验究竟取什么值，无法预言，带有随机性.

(3)所取的每一个值，都对应于随机试验的某一个结果.

随机事件用静态的观点来研究随机现象，而随机变量则是一种动态的观点，正如变量是高等数学有别于初等数学的基本概念，概率论能从计算一些孤立事件的概率发展为一个更高的理论体系，其基础概念就是随机变量.

8.2.2　分布函数

对于一个随机变量，不仅要知道它可能取哪些值，而且要知道它以怎样的概率来取这些值，即它的取值规律. 随机变量的取值规律通常用分布函数来描述.

分布函数　设 X 为一随机变量，称

$$F(x)=P(X\leqslant x)(-\infty<x<+\infty) \tag{8-15}$$

为随机变量 X 的分布函数.

由定义可知，分布函数 $F(x)$是定义域为全体实数，值域为$[0,1]$的普通函数，它的引入使许多概率问题转化为函数问题，这样就可以借助微积分的知识来研究随机事件.

分布函数在点 x 处的函数值就是随机变量落在区间$(-\infty,x]$内的概率. 由于对任意实数 $a<b$，有

$$P(a<X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a)=F(b)-F(a)$$

因此由 $F(x)$ 可求出 X 在任一区间内取值的概率,用分布函数 $F(x)$ 可以完整地刻画出不同类型随机变量 X 的概率分布.

例 8-13 "掷一颗均匀骰子"是随机试验,用随机变量 X 表示出现的点数.求:(1)X 的取值范围;(2)$P(X=1)$;(3)$P\{(X=1)\cup(X=2)\}$;(4)$P(X>4)$ 和 $P(X\leqslant 4)$;(5)$P(2\leqslant X<4)$.

解 (1)X 的取值范围是 $\{1,2,3,4,5,6\}$;

(2)$P(X=1)=\dfrac{1}{6}$;

(3)$P\{(X=1)\cup(X=2)\}=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$;

(4)$P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$;

$P(X\leqslant 4)=1-P(X>4)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$;

(5)$P(2\leqslant X<4)=P(X=2)+P(X=3)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.

例 8-14 在10件同类型产品中,有3件次品.现任取2件,用随机变量 X 表示"2件中的次品数",显然 X 的可能取值有0,1,2,求随机变量 X 的分布函数.

解 由古典概率,有

$$P(X=i)=\frac{C_3^iC_7^{2-i}}{C_{10}^2}(i=0,1,2)$$

又由 $F(x)=P(X\leqslant x)(X=0,1,2)$,得

当 $x<0$ 时,$\{X\leqslant x\}$ 是不可能事件,所以 $F(x)=P(X\leqslant x)=P(\Phi)=0$.

当 $0\leqslant x<1$ 时,$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_7^{2-0}}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$.

当 $1\leqslant x<2$ 时,$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{C_3^0C_7^{2-0}}{C_{10}^2}+\dfrac{C_3^1C_7^{2-1}}{C_{10}^2}=\dfrac{14}{15}$.

当 $x\geqslant 2$ 时,$\{X\leqslant x\}$ 是必然事件,所以 $F(x)=P(X\leqslant x)=P(\Omega)=1$.

故随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{7}{15}, & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{14}{15}, & 1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

由例 8-14 可知,分布函数具有以下性质.

(1)$0\leqslant F(x)\leqslant 1(-\infty<x<+\infty)$.

(2)在整个定义域内,$F(x)$ 是 x 的单调增加函数,即若 $x_1<x_2$,则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

(3)$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

(4)$F(x)$ 是右连续的,即 $\lim\limits_{u\to x^+}F(u)=F(x)$.

根据随机变量取值的情况,可以把随机变量分为两类:离散型随机变量和非离散型随机

变量. 如果随机变量的所有可能取值是可以一一列举出来的,这样的随机变量称为**离散型随机变量**. 如"打靶的环数""掷一枚均匀骰子的点数""产品抽样检查时出现的次品数"等,都是离散型随机变量. 在非离散型随机变量中,最重要的是连续型随机变量. 如"分子的运动速度""候车时的等待时间""灯泡的寿命"等,它们可以取某一区间或整个实数轴上的所有值,这样的随机变量称为**连续型随机变量**. 下面主要研究这两种随机变量的概率分布.

8.2.3　离散型随机变量的概率分布

1. 离散型随机变量的分布列

离散型随机变量 X 的取值规律除了用分布函数来描述外,还可以用下面的分布列来表示.

分布列　设 $x_k(k=1,2,\cdots)$为离散型随机变量 X 的所有可能值,而 X 取值 x_k 的概率为 p_k,即

$$P(X=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots) \tag{8-16}$$

则称式(8-16)为离散型随机变量 X 的概率分布,简称分布列.

离散型随机变量 X 的分布列也可用表格形式表示如下.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

由概率的基本性质可知,分布列具有以下两个性质.

(1)非负性:$p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots$.

(2)归一性:$\sum\limits_k p_k=1$.

例 8-15　设袋中有 10 只球,其中 7 只是白球,3 只是黑球. 现每次从中任取一只球,直到取到白球为止(分不放回和放回两种情形),求所需抽取次数 X 的分布列.

解　X 的可能取值为 1,2,3,4."$X=k$"表示"前 $k-1$ 次取到黑球,第 k 次取到白球($k=1,2,3,4$)".

(1)不放回取球.

$$P(X=1)=\frac{7}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$$

$$P(X=3)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120}$$

$$P(X=4)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120}$$

所需抽取次数 X 的分布列为

X	1	2	3	4
p	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

(2)有放回取球. 所需抽取次数 X 的分布列为

$$P(X=k)=\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}\frac{7}{10}(k=1,2,3,4)$$

例 8-16 某仓库存放一批产品，其中有一、二、三、四等品，分别占总数的 70%，15%，10%，5%. 现从中任取一个产品，用随机变量 X 描述产品的等级并画出概率分布图.

解 用“$X=k$”表示“取到的产品为 k 等品($k=1,2,3,4$)”，则 X 为随机变量，它可以取 1，2，3，4，且

$$P(X=1)=0.70,P(X=2)=0.15,P(X=3)=0.10,P(X=4)=0.05$$

分布列为

X	1	2	3	4
p	0.70	0.15	0.10	0.05

其概率分布图如图 8-8 所示.

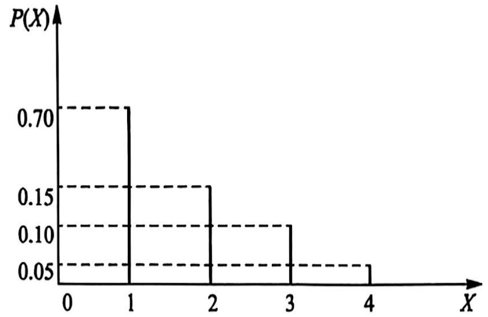

图 8-8

有了分布列，我们能清楚地看出离散型随机变量 X 取哪些值，以及取这些值的概率，可以通过式(8-17)求出离散型随机变量 X 的分布函数.

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k \tag{8-17}$$

它的图形是在 x_k 处有跃度为 p_k 的右连续的阶梯曲线. 虽然分布函数和分布列都能用来描述离散型随机变量，但是显然用分布列来描述更直观、更简单.

2. 几种常见的分布列

(1)两点分布. 若随机变量 X 的分布为

$$P(X=1)=p,P(X=0)=1-p=q(0<p<1) \tag{8-18}$$

即 $P(X=k)=p^kq^{1-k}(k=0,1)$，则称随机变量 X 服从**两点分布**(也称 0－1 分布).

两点分布比较常用. 当试验只有两个结果且都有正概率时，就确定了一个服从两点分布的随机变量. 如一次抛均匀硬币、一次射击击中与否、一次投篮投中与否都是服从两点分布的随机现象.

(2)二项分布. 若随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{1-k}(k=0,1,2,\cdots,n;0<p<1,q=1-p) \tag{8-19}$$

则称随机变量 X 服从参数为 n,p 的**二项分布**(也称伯努利分布)，记为 $X\sim B(n,p)$.

显然，$P(X=k)>0$，且由二项式定理易知

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{1-k}=(p+q)^n=1$$

二项分布的实际背景是前面介绍的 n 重伯努利概型；两点分布是二项分布当 $n=1$ 时的特例.

例 8-17　从某大学到火车站途中有 6 个交通岗，假设在每个交通岗是否遇到红灯相互独立，并且遇到红灯的概率都是$\frac{1}{3}$.

①设 X 为汽车行驶途中遇到的红灯数，求 X 的分布律；

②求汽车行驶途中至少遇到 5 次红灯的概率.

解　①由题意，$X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$，于是 X 的分布律为

$$P(X=k)=C_6^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{6-k}(k=0,1,\cdots,6)$$

②$P(X \geqslant 5)=P(X=5)+P(X=6)=C_6^5\left(\frac{1}{3}\right)^5 \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{13}{729}$.

例 8-18　某人射击的命中率为 0.02，他独立射击 400 次，试求其命中次数不少于 2 次的概率.

解　设 X 表示 400 次独立射击中命中的次数，则 $X \sim B(400, 0.02)$，故

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1-P(X=0)-P(X=1) \\ &= 1-C_{400}^0 0.02^0(1-0.02)^{400}-C_{400}^1 0.02^1(1-0.02)^{400-1} \approx 0.997\ 2 \end{aligned}$$

由此可见，当 n 较大时，二项分布的计算较麻烦，可以使用下面的泊松(Poisson)分布来近似计算.

(3)泊松分布. 若随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots;\lambda>0) \tag{8-20}$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记为 $X \sim P(\lambda)$.

可以证明，泊松分布是二项分布的极限分布. 当 n 很大，p 很小时，二项分布可近似地看成参数 $\lambda=np$ 的泊松分布.

现实生活中有很多随机现象服从泊松分布. 例如，在一段时间内电话台的呼叫次数、放射性物质的粒子数、到商店去的顾客数、书中的印刷错误等，都服从泊松分布.

例 8-19　设某国每对夫妇的子女数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且知一对夫妇有不超过 1 个孩子的概率为 $3e^{-2}$. 求任选一对夫妇，至少有 3 个孩子的概率.

解　由题意，$X \sim P(\lambda)$，且 $P(X \leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)=3e^{-2}$，即

$$e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}=3e^{-2} \Rightarrow \lambda=2$$

于是

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) &= 1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2) \\ &= 1-e^{-2}-\frac{2^1}{1!}e^{-2}-\frac{2^2}{2!}e^{-2}=1-5e^{-2} \approx 0.323 \end{aligned}$$

例 8-20　有 2 500 个条件相同的人参加了保险公司的人寿保险. 每个参加保险的人一年交付保险费 12 元，若一年内死亡，则保险公司付赔偿金 2 000 元. 设一年内每人死亡的概率为 0.002，求保险公司亏本的概率.

解　设一年内死亡的人数为 X，则 $X \sim B(2\ 500, 0.002)$. 保险公司亏本等价于 $2\ 000X>2\ 500 \times 12$，即 $X>15$. 因为

$$P(X>15)=1-P(X \leqslant 15)=1-\sum_{k=0}^{15} C_{2\ 500}^k(0.002)^k(0.998)^{2\ 500-k}$$

而$n=2\ 500$很大，$p=0.002$很小，故可用泊松分布近似计算. 因为$\lambda=np=2\ 500\times0.002=5$，查附录3得，$P(X>15)=\sum\limits_{k=16}^{\infty}\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}=0.000\ 1$.

结果表明，$P(X>15)$的数值很小，说明该保险公司在现行政策下"亏本"这一事件几乎不会发生. 一般地，像这类概率很小的事件称为**小概率事件**.

8.2.4 连续型随机变量的概率分布

1. 连续型随机变量及其概率密度

对于随机变量X，若在实数集$\mathbf{R}$上存在非负可积函数$f(x)$，对任意实数$a,b(a<b)$都有

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{8-21}$$

则称X为**连续型随机变量**. 称$f(x)$为连续型随机变量X的**概率密度函数**，简称概率密度或密度函数.

概率密度$f(x)$具有以下两个基本性质.

(1)非负性：$f(x)\geqslant0$.

(2)归一性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

可以证明，满足上述两个基本性质的函数$f(x)$可作为某一连续型随机变量的概率密度.

对于连续型随机变量X，因为$\int_c^c f(x)\mathrm{d}x=0$，所以

$$P(X=c)=0$$

可见，概率为0的事件不一定是不可能事件，概率为1的事件也不一定是必然事件.

由此可知，在计算连续型随机变量落在某一区间内的概率时，区间是否包含端点是无须考虑的，即

$$P(a<X<b)=P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X\leqslant b)$$

2. 连续型随机变量的分布函数

若连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，则随机变量X的**分布函数**为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t \tag{8-22}$$

由微积分的知识可知：

(1)连续型随机变量的分布函数$F(x)$处处连续.

(2)在密度函数$f(x)$的连续点处，有

$$F'(x)=f(x) \tag{8-23}$$

(3)$P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. (8-24)

式(8-22)和式(8-23)表明了连续型随机变量X的概率密度与分布函数之间的关系，它们之中已知一个可求得另一个，这是非常自然的，因为两者都是刻画随机变量X概率分布的工具.