

第2章 导数与微分

微分学的创立是数学史上最重要的事件之一. 其基本思想源于古希腊的求积术, 但直接动力却来自 17 世纪的科技问题. 微积分的知识在日常生活及科学技术中有着广泛应用. 微分学也是微积分学的重要组成部分, 它从微观的角度分析了客观世界中量的变化.

本章将在介绍导数与微分的概念及求解的基础上, 进一步介绍导数与微分的简单应用.

§ 2.1 导数的概念

现实生活中的许多量的变化是非均匀的, 量的变化快慢称为变化率. 研究非均匀变化量的变化率问题有着广泛的实际意义.

2.1.1 问题举例

对于非均匀变化求瞬时变化率问题, 我们可以举出很多示例. 例如, 某个时间段内通过导体横截面的电量 $Q=Q(t)$ 是非均匀变化的, 求 t_0 时刻的电流强度; 某产品在一定时间内的价格随时间波动的函数为 $P=P(t)$, 求 t_0 时刻的价格变化率; 做变速直线运动 $v=v(t)$ 的质点, 求 t_0 时刻的速度变化率(加速度), 等等. 诸如此类的问题都可以归结为非均匀变化量求变化率问题. 事实上, 非均匀变化对应的函数图像为曲线. 我们不妨将上述问题归结为曲线函数的变化率问题, 即曲线在某点处的切线的斜率.

切线的斜率 设连续函数 $y=f(x)$ 的图像如图 2-1 所示, 求曲线在点 M 处的切线的斜率.

分析 要求曲线在点 x_0 处的切线的斜率, 首先要考察割线 MN 的斜率, 其中, $M(x_0, f(x_0))$, $N(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. 设割线的倾斜角为 φ , 切线的倾斜角为 α , 于是

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

显然, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $N \rightarrow M$, 割线 $MN \rightarrow$ 切线 MT , $\varphi \rightarrow \alpha$, $\tan \varphi \rightarrow \tan \alpha$. 曲线在点 M 处的切线的斜率为

$$k = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

变速直线运动的瞬时速度 某质点做直线运动, 其位移时间函数为 $s=s(t)$, 求质点在 t_0 时刻的瞬时速度.

分析 对于匀速直线运动, 其速度为 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$; 对于非匀速直线运

动, 我们可以采用同样的方式求出 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内的平均速度为 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. 由于速度的变化是连续的, 因此, 时间增量的绝对值 $|\Delta t|$ 越小, 速度的改变也就越小, $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内的平均速度 \bar{v} 和质点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 就越接近. 当时间的增量为无穷小量 ($\Delta t \rightarrow 0$)

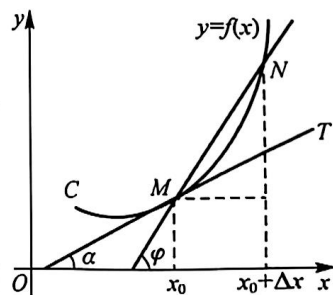


图 2-1

时,平均速度 \bar{v} 和质点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 就无限接近,即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

上述引例的实际意义虽然不同,但解决的方式都归结为平均变化率求极限问题,我们把这种极限问题规范如下.

2.1.2 导数的定义

1. 函数在点 x_0 处的导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及近旁有定义,自变量在点 x_0 处有增量 Δx ,如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,相应函数的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在,即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$,即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记为 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$, $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

必须注意以下两点.

- (1) 函数在点 x_0 处的导数就是函数在点 x_0 处的瞬时变化率.
- (2) 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在,就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导;如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$,也可称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大量.

例如,问题举例中的切线斜率 $k=f'(x_0)$,瞬时速度 $v(t_0)=s'(t_0)$.

2. 导函数

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点处都可导,即对于任意一点 $x \in I$,有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

都存在,则 $f'(x)$ 是一个关于 x 的函数,我们称 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数(简称导数),也可记为 y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

必须注意以下两点.

- (1) 导函数 $f'(x)$ 表示函数 $f(x)$ 在任意点处的变化快慢.
- (2) 导函数 $f'(x)$ 与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的关系就是函数与函数值的关系, $f(x_0)$ 是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处对应的函数值,而不是对 $f(x_0)$ 求导数.

既然如此,以后无论是求导函数,还是求函数在定点 x_0 处的导数,我们都归结为先求导函数.

2.1.3 求导举例

1. 定义求导

根据导数的定义,要求某函数的导数,可以通过对平均变化率取极限来解决,因此,求导思路为:当自变量由 x 变化到 $x + \Delta x$ 时,求相应的 Δy ; 计算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; 取极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. 当然,



微课
导数的定义

也可以直接求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

例 2-1 求常函数 $f(x)=C$ 的导数.

$$\text{解 } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C-C}{\Delta x} = 0, \text{ 即}$$

$$C' = 0$$

它表示常函数在任意点处的变化率恒为零.

例 2-2 求函数 $f(x)=x^3$ 的导数.

$$\text{解 } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2] = 3x^2,$$

即

$$(x^3)' = 3x^2$$

事实上,在后面的导数方法中,我们可以证明,任意幂函数 x^a 的导数公式为

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

例 2-3 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

$$\text{解 } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x,$$

即

$$(\sin x)' = \cos x$$

同理可得

$$(\cos x)' = -\sin x$$

2. 公式求导

基本初等函数的求导公式如下.

$$(1) C' = 0 (C \text{ 为常数});$$

$$(3) (a^x)' = a^x \ln a, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1;$$

$$(5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1;$$

$$(7) (\sin x)' = \cos x;$$

$$(9) (\tan x)' = \sec^2 x;$$

$$(11) (\sec x)' = \sec x \tan x;$$

$$(13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) (x^a)' = ax^{a-1};$$

$$(4) (e^x)' = e^x;$$

$$(6) (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(8) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(10) (\cot x)' = -\csc^2 x;$$

$$(12) (\csc x)' = -\csc x \cot x;$$

$$(14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(15) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(16) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

例 2-4 求函数 $y=2^x$ 在点 $x=3$ 处的导数.

解 因为 $(a^x)' = a^x \ln a$, 则 $(2^x)' = 2^x \ln 2$, 所以

$$y'|_{x=3} = 2^x \ln 2|_{x=3} = 2^3 \ln 2 = 8 \ln 2$$

例 2-5 求函数 $f(x) = \tan x$ 在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的导数.

解 因为 $(\tan x)' = \sec^2 x$, 所以

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2 \frac{\pi}{4} = 2$$

2.1.4 导数的几何意义

由问题举例我们可以看出, 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$, 在图形上表示该函数曲线 $y=f(x)$ 在对应点处的切线的斜率, 即 $k=f'(x_0)$.

例 2-6 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $A(1, 1)$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2}$, 所以切线的斜率为

$$k_1 = f'(x_0) = y'|_{x=1} = -x^{-2}|_{x=1} = -1$$

法线的斜率为

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = 1$$

由直线的点斜式方程可得点 $A(1, 1)$ 处的切线方程为

$$y-1 = -(x-1)$$

即 $x+y-2=0$.

法线方程为

$$y-1 = (x-1)$$

即 $x-y=0$.

导数的几何意义是通过函数的曲线在某点处切线的倾斜程度来反映函数的变化快慢, 是变量变化快慢的直观反映. 而导数的实际意义往往根据函数所表示意义的不同而不同. 例如, 位移导数的实际意义表示速度; 速度导数的实际意义表示加速度; 电量函数导数的实际意义表示电流强度.

上述导数概念的抽象过程是从实际问题出发, 给出几何、物理两类不同的实例, 对这些实例所运用的分析思路、求解方法是完全类似的, 所得到的结果也具有高度的一致性, 将上述问题的共性抽象概括就得到了相应的概念, 进而再利用这些概念去分析和解决其他实际问题. 这些数学概念的学习有助于培养“抽象概括思维”和“由特殊到一般、再由一般到特殊的思维”; 同时, 这些概念的形成都遵循“从实践中来, 再到实践中去”“从特殊到一般, 再从一般到特殊”的马克思主义方法论, 有助于培养我们用辩证的科学的方法去解决实际问题.

2.1.5 高阶导数

由上述分析可知, 非匀变速直线运动 $s=s(t)$, 位移函数的导数 $s'(t)=v(t)$ 是速度函数. 显然, 速度函数的导数 $v'(t)=a(t)$ 就是加速度函数, 其关系为 $a(t)=v'(t)=[s'(t)]'=s''(t)$.

二阶导数 一般地,对函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 求导数,所得的函数称为原来函数 $y=f(x)$ 的二阶导数,记作 $f''(x)$,即 $f''(x)=[f'(x)]'$,也可记作 $y'', \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$.

类似地,二阶导数的导数称为三阶导数,三阶导数的导数称为四阶导数, ..., $(n-1)$ 阶导数的导数称为 n 阶导数,分别记作 $f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

2.1.6 原函数

由于位移函数的导数是速度函数,即 $s'(t)=v(t)$,我们说速度函数 $v(t)$ 是位移函数 $s(t)$ 的导函数,反过来,我们把位移函数 $s(t)$ 称为速度函数 $v(t)$ 的原函数.

一般地,如果 $F'(x)=f(x)$,我们就称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

由上述导数公式可知, x^a 是 ax^{a-1} 的一个原函数, $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

2.1.7 可导与连续的关系

函数在某点处可导与函数在该点处连续是两个不同的概念,它们之间的关系如下.

1. 可导必连续

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在,即当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,必有 $\Delta y \rightarrow 0$,所以函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 连续不一定可导

导数的几何意义是曲线在某点处的切线的斜率.如果函数曲线在某点处无切线,或切线的斜率不存在,则函数在该点处就不可导.例如,函数 $f(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,但无切线,因此不可导,如图 2-2 所示.而函数 $g(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在点 $x=0$ 处连续,但在该点处的切线的斜率不存在,因此不可导,如图 2-3 所示.

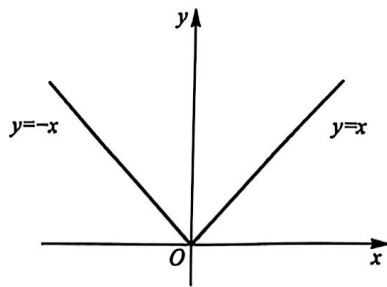


图 2-2

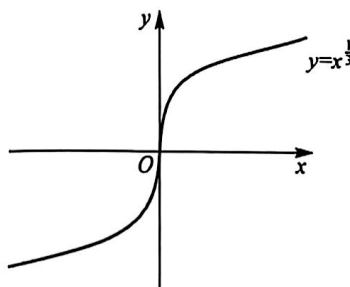


图 2-3

由上述分析可知,函数在某点处连续是它在该点处可导的必要条件,非充分条件.事实上,初等函数的可导点,就是该初等函数的定义域与导函数定义域交集内的点.

练习 2-1

1. 填空题.

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = \underline{\quad\quad\quad}$.

(2) 设 $y = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x}}$, 则 $y' = \underline{\frac{-3}{2\sqrt{x}}}$.