

【例 1-8】在稳定流动系统中，水连续从粗管流入细管。粗管内径 $d_1=10\text{cm}$ ，细管内径 d_2 ，当流量为 $4\times 10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$ 时，求粗管内和细管内水的流速。

解 粗管内水的流速

$$u_1 = \frac{q_V}{A_1} = \frac{4 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4} \times (0.1)^2} = 0.51 (\text{m/s})$$

根据式 (1-21c)

$$u_1 d_1^2 = u_2 d_2^2$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = \left(\frac{10}{5} \right)^2 = 4 \text{ 倍}$$

细管内水的流速

$$u_2 = 4u_1 = 4 \times 0.51 = 2.04 (\text{m/s})$$

四、伯努利方程式及应用



拓展阅读

伯努利方程式的由来

丹尼尔·伯努利 (Daniel Bernoulli, 1700—1782) 是瑞士物理学家、数学家、医学家。瑞士的伯努利家族，一个家族三代人中产生了八位科学家，他们在数学、科学、技术、工程乃至法律、管理、文学、艺术等方面享有名望，有的甚至声名显赫。

丹尼尔·伯努利，是著名的伯努利家族中最杰出的一位，涉及科学领域较多的人，丹尼尔的博学成为伯努利家族的代表。和他的父辈一样，违背家长要他经商的愿望，曾在多所大学坚持学习医学、哲学、伦理学、数学等。先后任解剖学、动力学、数学、物理学教授。在 1725—1749 年间，伯努利曾十次荣获法国科学院的年度奖。

1738 年他出版了经典著作《流体动力学》，这是他最重要的著作。书中用能量守恒定律解决流体的流动问题，写出了流体动力学的基本方程，后人称之为“伯努利方程”，提出了“流速增加、压强降低”的伯努利原理。

1. 流动流体所具有的机械能

【1】位能 流体受重力作用在不同高度处所具有的能量称为位能。位能是一个相对值，计算位能时应先规定一个基准水平面，如 $0-0'$ 面。将质量为 m kg 的流体自基准水平面 $0-0'$ 处举到 z 处所做的功，即为位能。

质量为 m kg 流体的位能为 mgz ，其单位为 J；1kg 的流体所具有的位能为 zg ，其单位为 J/kg。

【2】动能 流体以一定速度流动所具有的能量，称为动能。

质量为 m (kg)、速度为 u (m/s)，流体的动能为 $\frac{1}{2}mu^2$ ，其单位为 J；1kg 的流体所具有的动能为 $\frac{1}{2}u^2$ ，其单位为 J/kg。

【3】静压能 在静止或流动的流体内部，任一处都有相应的静压强，如果有液体流动的壁面上开一小孔，并在小孔处装一根垂直的细玻璃管，液体便会在玻璃管内上升，上升的液柱高度即是管内该截面处液体静压强的表现。如图 1-26 所示的管路系统，由于在 $1-1'$ 截面处流体具

一定的静压强, 流体要通过该截面进入系统, 就需要对流体做一定的功, 以克服这个静压强。换句话说, 进入截面后的流体, 也就具有与此功相当的能量, 流体所具有的这种能量称为静压能或流动功。

质量为 m kg 流体的静压能为 $\frac{mp}{\rho}$, 其单位为 J; 1kg 流体的静压能为 $\frac{p}{\rho}$, 其单位为 J/kg。因此, m kg 流体在某截面上的总机械能为

$$mgz + \frac{1}{2} mu^2 + \frac{mp}{\rho}$$

1kg 流体在某截面上的总机械能为

$$gz + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho}$$

2. 伯努利方程式

〔1〕理想流体的伯努利方程式 当理想流体在某一密闭管路中作稳定流动时, 由能量守恒定律可知, 进入管路系统的总能量应等于从管路系统带出的总能量。在无其他形式的能量输入和输出的情况下, 理想流体在流动过程中任意截面上总机械能为常数, 即

$$gz + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$

如图 1-26 所示, 将理想流体由截面 1—1' 输送到截面 2—2', 根据机械能守恒原理, 两截面间流体的总机械能相等。

① 以单位质量流体为基准的理想流体的伯努利方程。

$$z_1 g + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = z_2 g + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (1-22)$$

式中各项单位为 J/kg。

② 以单位重量流体为基准的理想流体的伯努利方程。

将式 (1-22) 等式的两边同除以 g , 得出以单位重量流体为基准的伯努利方程

$$z_1 + \frac{1}{2g} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{1}{2g} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho g} \quad (1-22a)$$

式中各项单位为 m。

由式 (1-22a) 可知, 理想流体在不同两截面间流动, 两截面间总的机械能相等, 且各种机械能可以相互转化。

〔2〕实际流体的伯努利方程式 在化工生产中所处理的流体多数是实际流体, 实际流体在流动过程中存在流体阻力, 克服这部分流体阻力要消耗一部分机械能, 这部分机械能称为能量损失或阻力损失。如图 1-27 所示, 对于 1kg 的流体而言, 从截面 1—1' 输送到截面 2—2' 时, 需克服两截面间各项阻力所损失的能量为 $\sum W_r$, 单位为 J/kg。为了补充损失掉的能量需使用外加设备即流体输送机械 (泵或风机) 向流体做功。1kg 流体从流体输送机械所获得的能量称为外加能量或称外功, 用 W_e 表示, 其单位为 J/kg。

在如图 1-27 所示的管路中还有加热器或冷却器等, 流体通过时必与之换热。设换热器向 1kg 流体提供的热量为 Q , 其单位为 J/kg; 若无, 则 $Q=0$ 。由于热能是非机械能, 从工程上讲是可以忽略的。这里只讨论机械能的守恒及其转化。

按照能量守恒及转化定律, 输入系统的总机械能必须等于从系统中输出的总能量。

理想流体的
含义



伯努利方程式
及应用

$$W_e = H_e g$$

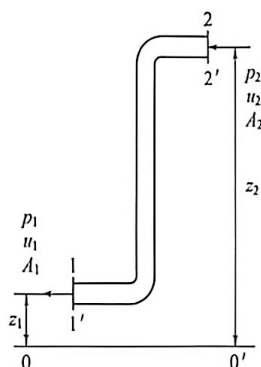


图1-26 理想流体管路系统

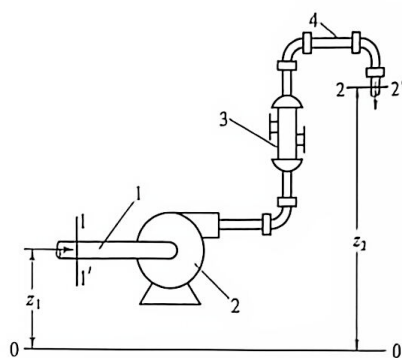


图1-27 实际流体稳定流动系统示意

1—吸入管；2—输送机械；3—热交换器；4—排出管

① 以单位质量流体为基准的实际流体的伯努利方程。

$$z_1 g + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + W_e = z_2 g + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + \sum W_f$$

式中，各项的单位为 J/kg。

② 以单位重量流体为基准的实际流体的伯努利方程。

将式（1-23）等式的两边同除以 g ，得以单位重量流体为基准的实际流体的伯努利方程

$$z_1 + \frac{1}{2g} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho g} + H_e = z_2 + \frac{1}{2g} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho g} + \sum H_f$$

式中，各项单位为 J/N 或 m，其中 z 、 $\frac{1}{2g} u^2$ 、 $\frac{p}{\rho g}$ 分别称为位压头、动压头和静压头； H_e 为输送机械的有效压头， $\sum H_f$ 则为损失压头。

③ 将等式（1-23）两边同乘密度（液体）。

$$\rho z_1 g + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho W_e = \rho z_2 g + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho \sum W_f$$

式（1-23b）各项的单位为 Pa。

【3】伯努利方程式的讨论

① 当系统中的流体处于静止时，伯努利方程式变为

$$z_1 g + \frac{p_1}{\rho} = z_2 g + \frac{p_2}{\rho}$$

式（1-24）即为流体静力学基本方程式的另一种形式。

② 在伯努利方程式中， zg 、 $\frac{1}{2} u^2$ 、 $\frac{p}{\rho}$ 分别表示单位质量流体在某截面上所具有的位能、动能和静压能；而 W_e 、 $\sum W_f$ 是指单位质量流体在两截面间获得或消耗的能量。特别是 W_e ，即输送 1kg 流体所做的有效功，是输送机械的重要参数之一。

③ 伯努利方程式的推广。伯努利方程式适用于不可压缩流体，如液体；对于可压缩流体，如气体，当 $\frac{p_1 - p_2}{p_1} < 20\%$ ，仍可用式（1-23）计算，但式中的 ρ 要用两截面间的平均密度代替。

3. 伯努利方程式应用**特别提示** 应用伯努利方程时应注意以下问题



【1】作图 根据题意画出流动系统的示意图,并指明流体的流动方向。

【2】截面的选取 确定上、下游截面,以明确流动系统的衡算范围。所选取的截面应与流体的流动方向相垂直。

【3】基准水平面的选取 基准水平面可以任意选取,但必须与地面平行。为计算方便,宜选取两截面中位置较低的截面为基准水平面。若截面不是水平面,而是垂直于地面,则基准面应选管子的中心线。

【4】单位必须一致 在应用伯努利方程式解题前,应把有关物理量换算成一致的单位,对于压力还应注意表示方法的一致。

【例 1-9】某车间用一高位槽向塔内供应液体,如附图所示,高位槽和塔内的压力均为大气压。液体在加料管内的速度为 2.2m/s ,管路阻力估计为 25J/kg (从高位槽的液面至加料管入口之间),假设液面维持恒定,其高位槽内液面至少要在加料管入口以上多少米?

解 取高位槽液面为 1—1 截面,加料管入口处截面为 2—2 截面,并以 2—2 截面中心线为 0—0 截面即基准面。在 1—1 至 2—2 两截面之间列伯努利方程,因两截面间无外功加入 ($W_e=0$),故

$$z_1g + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + W_e = z_2g + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + \sum W_f$$

其中, $z_1=x$, 待求值, $u_1 \approx 0$, $p_1=0$ (表压), $p_2=0$ (表压), $u_2=2.2\text{m/s}$, $z_2=0$, $\sum W_f=25\text{J/kg}$, 将已知数据代入上式

$$z_1g = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \sum W_f = 0 + 2.42 + 25 = 27.42$$

解出 $z_1=x=2.80\text{m}$ 。

计算结果说明高位槽的液面要距加料管入口 2.80m 以上。由本题可知,高位槽能连续供应液体是由于流体的位能转变为动能和静压能,并用于克服管路阻力的缘故。

【例 1-10】用泵 2 将贮槽 1 中密度为 1200kg/m^3 的溶液送到蒸发器 3 内,如附图所示。贮槽内液面维持恒定,其上方压强为 101330Pa ,蒸发器上部蒸发室内的操作压强为 26670Pa (真空度),蒸发器进料口高于贮槽内液面 15m ,进料量为 $20\text{m}^3/\text{h}$,溶液流经全部管路的能量损失为 120J/kg ,已知管路的内直径为 60mm ,泵的效率为 0.65 ,求泵的轴功率。

解 取贮槽液面为 1—1 截面,管路出口内侧为 2—2 截面,并以 1—1 截面为基准水平面,在 1—1 至 2—2 两截面间列伯努利方程。

$$z_1g + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + W_e = z_2g + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + \sum W_f$$

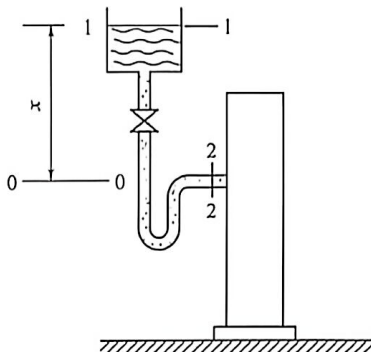
式中, $z_1=0$, $z_2=15\text{m}$, $p_1=0$ (表压), $p_2=-26670\text{Pa}$ (表压), $u_1=0$, $\sum W_f=120\text{J/kg}$ 。

$$u_2 = \frac{20}{0.785 \times 0.06^2 \times 3600} = 1.97 (\text{m/s})$$

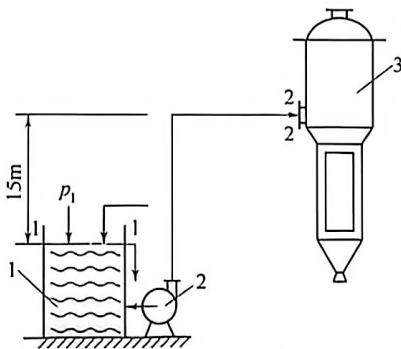
将上述各项数值代入,则

$$W_e = 15 \times 9.81 + \frac{1.97^2}{2} + 120 - \frac{26670}{1200} = 246.9 (\text{J/kg})$$

泵的有效功率 P_e 为



【例 1-9】附图



【例 1-10】附图

1—贮槽; 2—泵; 3—蒸发器